2.9.18 Řešení exponenciálních rovnic logaritmováním

Předpoklady: 2917

Pedagogická poznámka: Původně jsem celou problematiku řešil spočtením jednoho příkladu, ale v písemkách patřila rovnice tohoto typu vždy k největším úskalím. Časem jsem si uvědomil, že logaritmování exponenciálních rovnic má před řešením logaritmických rovnic velký význam. Studenti se v něm učí:
a) logaritmovat rovnice,
b) vnímat logaritmus jako jediné číslo (a tím se vyhýbat krácení logaritmů, vytýkání základů a podobných chyb),
c) dodržovat postup na řešení lineárních rovnic ve zdánlivě zcela nové situaci,
d) používat věty o logaritmech (při úpravách na konci řešení).

Pedagogická poznámka: Pokud žáci počítají sami, dojdou k různým tvarům konečných výsledků. Nejjednodušším typem kontroly je napsat na tabuli přibližné desetinné hodnoty výsledků, podle kterých si mohou pomocí kalkulačky zkontrolovat svůj výsledek.

Př. 1: Vyřeš rovnici $3^{x+1}=2^{3-2x}$.

$3^{x+1}=2^{3-2x}$

$\log 3^{x+1}=\log 2^{3-2x}$

$(x+1)\log 3=(3-2x)\log 2$ - teď jen lineární rovnice, roznásobíme závorky.

$x\log 3+\log 3=3\log 2-2x\log 2$

$x\log 3+2x\log 2=3\log 2-\log 3$

$x(\log 3+2\log 2)=3\log 2-\log 3$

$x=\dfrac{3\log 2-\log 3}{\log 3+2\log 2}$ $\quad K=\left\{\dfrac{3\log 2-\log 3}{\log 3+2\log 2}\right\}$

Pedagogická poznámka: Tento příklad je jedním z míst, kde si můžete ověřit, jak silná je tendence studentů dělat věci „selským rozumem“. I když napíšete rovnici ve tvaru $(x+1)\log 3=(3-2x)\log 2$ na tabuli, řeknete, že jde o lineární rovnici, a zopakujete, jakým způsobem se lineární rovnice řeší, naprostá většina studentů upraví rovnici do tvaru $\dfrac{x+1}{3-2x}=\dfrac{\log 2}{\log 3}$ a neví, co s ní dál. Podvědomá tendence separovat neznámé pryč zvítězí nad logikou.

Př. 2: Uprav výsledek předchozího příkladu tak, aby v čitateli i jmenovateli zlomku byl jediný logaritmus z jednoho čísla. Pak vypočti pomocí kalkulačky přibližnou hodnotu řešení předchozí rovnice a dosazením ověř správnost výsledku.

$$x=\frac{3\log 2-\log 3}{\log 3+2\log 2}=\frac{\log 2^3-\log 3}{\log 3+\log 2^2}=\frac{\log\left(\frac{2^3}{3}\right)}{\log\left(3\cdot 2^2\right)}=\frac{\log\frac{8}{3}}{\log 12}\doteq 0,3947$$

Dosadíme: $3^{0,3947+1}=2^{3-2\cdot 0,3947}$.

$3^{1,3947}=2^{2,2106}$

$4,6285=4,6286$

Obě strany jsou přibližně stejné. Hodnota logaritmu byla zaokrouhlená, malá chyba ve výsledku se dala očekávat.

Př. 3: Vyřeš rovnici $\left(\sqrt{5}\right)^{2x+1}=\left(7^2\right)^{1-x}$. Logaritmuj se základem *e*. Výsledek uprav do tvaru podílu dvou logaritmů. Uveď přibližný výsledek s přesností na 6 desetinných míst.

Malá vada na kráse: Rovnice obsahuje závorky s mocninami. Mocniny upravíme, než budeme logaritmovat.

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{2x+1}=7^{2(1-x)}$$

$5^{x+\frac{1}{2}}=7^{2-2x}$ - logaritmujeme.

$\ln\left(5^{x+\frac{1}{2}}\right)=\ln\left(7^{2-2x}\right)$ - exponenty stáhneme dolů.

$\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln 5=\left(2-2x\right)\ln 7$ - lineární rovnice, řešíme klasicky.

$x\ln 5+0,5\ln 5=2\ln 7-2x\ln 7$

$x\ln 5+2x\ln 7=2\ln 7-0,5\ln 5$

$x\left(\ln 5+2\ln 7\right)=2\ln 7-0,5\ln 5$

$$x=\frac{2\ln 7-0,5\ln 5}{\ln 5+2\ln 7}=\frac{\ln 49-\ln\sqrt{5}}{\ln 5+\ln 49}=\frac{\ln\frac{49}{\sqrt{5}}}{\ln 245}\doteq 0,561163$$

$$K=\left\{\frac{2\ln 7-0,5\ln 5}{\ln 5+2\ln 7}\right\}$$

Konečný tvar rovnice je možné zjednodušit, když budeme logaritmovat o vhodném základu.

Př. 4: Vyřeš rovnici: $4\cdot 2^{2x-1}=\frac{3^{x+3}}{9}$. Logaritmuj o různých základech. Spočti a porovnej přibližné výsledky z různých způsobů řešení.

Menší problém: Strany obsahují součiny $\Rightarrow$ převedeme na jednu mocninu:

$$2^2 \cdot 2^{2x-1} = \frac{3^{x+3}}{3^2}.$$
$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$
Jaké základy má smysl použít:

- 10 a e – snadný výpočet na kalkulačce
- 2 a 3 – na jedné straně rovnice zmizí logaritmus

Zkusíme všechny možnosti:

$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$
$$\log\left(2^{2x+1}\right) = \log\left(3^{x+1}\right)$$
$$(2x+1)\log 2 = (x+1)\log 3$$
$$2x\log 2 + \log 2 = x\log 3 + \log 3$$
$$2x\log 2 - x\log 3 = \log 3 - \log 2$$
$$x(2\log 2 - \log 3) = \log 3 - \log 2$$
$$x = \frac{\log 3 - \log 2}{2\log 2 - \log 3} = \frac{\log\frac{3}{2}}{\log\frac{4}{3}} \doteq 1{,}409421$$

$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$
$$\ln\left(2^{2x+1}\right) = \ln\left(3^{x+1}\right)$$
$$(2x+1)\ln 2 = (x+1)\ln 3$$
$$2x\ln 2 + \ln 2 = x\ln 3 + \ln 3$$
$$2x\ln 2 - x\ln 3 = \ln 3 - \ln 2$$
$$x(2\ln 2 - \ln 3) = \ln 3 - \ln 2$$
$$x = \frac{\ln 3 - \ln 2}{2\ln 2 - \ln 3} = \frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{4}{3}} \doteq 1{,}409421$$

$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$
$$\log_2\left(2^{2x+1}\right) = \log_2\left(3^{x+1}\right)$$
$$(2x+1)\log_2 2 = (x+1)\log_2 3$$
$$(2x+1)\cdot 1 = x\log_2 3 + 1\log_2 3$$
$$2x - x\log_2 3 = \log_2 3 - 1$$
$$x(2 - \log_2 3) = \log_2 3 - 1$$
$$x = \frac{\log_2 3 - 1}{2 - \log_2 3} \doteq 1{,}409421$$

$$2^{2x+1} = 3^{x+1}$$
$$\log_3\left(2^{2x+1}\right) = \log_3\left(3^{x+1}\right)$$
$$(2x+1)\log_3 2 = (x+1)\log_3 3$$
$$2x\log_3 2 + \log_3 2 = (x+1)\cdot 1$$
$$2x\log_3 2 - x = 1 - \log_3 2$$
$$x(2\log_3 2 - 1) = 1 - \log_3 2$$
$$x = \frac{1 - \log_3 2}{2\log_3 2 - 1} \doteq 1{,}409421$$

Všechny cesty vedou ke stejnému výsledku.

$$K = \left\{\frac{\log 3 - \log 2}{2\log 2 - \log 3}\right\}$$

Pedagogická poznámka: Při hodině u předchozího příkladu rozdělím třídu na skupiny a každá počítá jiným způsobem.

Př. 5: Vyřeš rovnici $2\cdot 3^{2x} = 5^{x-1}$.

Vada na kráse: na levé straně překáží dvojka, ale stejně s ní nic neuděláme $\Rightarrow$ logaritmujeme takto: $\log\left(2\cdot 3^{2x}\right) = \log\left(5^{x-1}\right)$.

$$\log 2 + \log\left(3^{2x}\right) = \log\left(5^{x-1}\right)$$
$$\log 2 + 2x\log 3 = (x-1)\log 5$$
$$\log 2 + 2x\log 3 = x\log 5 - \log 5$$
$$2x\log 3 - x\log 5 = -\log 5 - \log 2$$
$$x(2\log 3 - \log 5) = -\log 5 - \log 2$$

$$x=\frac{-\log 5-\log 2}{2\log 3-\log 5}=\frac{\log\frac{1}{10}}{\log\frac{9}{5}}=-\frac{1}{\log\frac{9}{5}}\doteq -3{,}91738 \qquad K=\left\{\frac{-\log 5-\log 2}{2\log 3-\log 5}\right\}$$

Pedagogická poznámka: Stejně jako při řešení slovních úloh je potřeba dávat pozor, aby studenti správně upravovali levou stranu rovnice.

Př. 6: Vyřeš rovnici $2^{x+2}\cdot 3^{x-1}=5^{2x}$.

$2^{x+2}\cdot 3^{x-1}=5^{2x}$ - logaritmujeme.

$\log\left(2^{x+2}\cdot 3^{x-1}\right)=\log\left(5^{2x}\right)$ - každá strana je jedno číslo, které musíme logaritmovat dohromady.

$$\log\left(2^{x+2}\right)+\log\left(3^{x-1}\right)=\log\left(5^{2x}\right)$$
$$(x+2)\log 2+(x-1)\log 3=2x\log 5$$
$$x\log 2+2\log 2+x\log 3-\log 3=2x\log 5$$
$$x\log 2+x\log 3-2x\log 5=\log 3-2\log 2$$
$$x(\log 2+\log 3-2\log 5)=\log 3-2\log 2$$
$$x=\frac{\log 3-2\log 2}{\log 2+\log 3-2\log 5}\doteq 0{,}20158 \qquad K=\left\{\frac{\log 3-2\log 2}{\log 2+\log 3-2\log 5}\right\}$$

Př. 7: Vyřeš rovnici $2^{x^2}\cdot 3^{2x}=5^{x}$.

$2^{x^2}\cdot 3^{2x}=5^{x}$ - logaritmujeme.

$\log\left(2^{x^2}\cdot 3^{2x}\right)=\log\left(5^{x}\right)$ - každá strana je jedno číslo, které musíme logaritmovat dohromady.

$$\log\left(2^{x^2}\right)+\log\left(3^{2x}\right)=\log\left(5^{x}\right)$$
$$x^2\log 2+2x\log 3=x\log 5$$

$x^2\log 2+2x\log 3-x\log 5=0$ $\Rightarrow$ kvadratická rovnice bez absolutního členu $\Rightarrow$ vytkneme x.

$$x(x\log 2+2\log 3-\log 5)=0$$

$x_1=0$ $\qquad x\log 2+2\log 3-\log 5=0 \Rightarrow x\log 2=\log 5-2\log 3$

$$x_2=\frac{\log 5-2\log 3}{\log 2}\doteq -0{,}847997 \qquad K=\left\{0;\frac{\log 5-2\log 3}{\log 2}\right\}$$

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu jde samozřejmě o to, jestli si studenti všimnou, že získali docela obyčejnou kvadratickou rovnici.

Shrnutí: Logaritmováním dostaneme neznámou z exponentu.